

**Dénombrement des régions d'horloges pour  
les automates temporisés**

*A. Elqortobi, A. Ennouary  
et G. von Bochmann*

**publication # 1116**

**Mars 1998**

# DÉNOMBREMENT DES RÉGIONS D'HORLOGES POUR LES AUTOMATES TEMPORISÉS<sup>1</sup>

A. Elqortobi, A. Ennouary et G. von Bochman

Université de Montréal

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

E-mail: {elqortob, Ennouary}@iro.umontreal.ca

bochmann@site.uottawa.ca

---

## Sommaire

Dans cette étude, nous déterminons le nombre exact de régions d'horloges générées à partir d'une relation d'équivalence définie sur l'espace des valeurs d'horloges dans un automate temporisé (cf[4]). Ce nombre est de très loin plus petit que celui donné en [4]. Celui-ci joue un rôle très important dans le test des systèmes temps réel puisqu'il permet de calculer la longueur de la trace distinguant deux états du système. Nous faisons aussi remarquer que le nombre de régions d'horloges (classes d'équivalence) générées est extrêmement lié aux nombres de Stirling de seconde espèce. Quant à la somme totale de ces régions, son expression se trouve simplifiée au moyen des polynômes eulériens.

---

<sup>1</sup> Publication du département DIRO # 1116, Université de Montréal

## I) INTRODUCTION:

Actuellement, les applications informatiques sont de plus en plus utilisées dans des systèmes critiques tels que le suivi des malades, le contrôle du trafic aérien, etc... De plus, nous assistons à une évolution importante des réseaux à haut débit et des applications multimédia. Ces systèmes ont en commun la caractéristique d'être tous spécifiés avec des contraintes temporelles pour conditionner leurs fonctionnements. En effet, le fonctionnement de ces systèmes ne dépend pas uniquement des événements en entrée et en sortie mais aussi des plages du temps dans lesquelles ces événements auront lieu. Plusieurs modèles de temps ont été développés pour décrire ces systèmes dont nous pouvons citer les modèles discret, à horloge fictive et continu. L'expressivité de ces modèles est fonction du domaine et de la sémantique de temps considérés (cf[5]). Le modèle des automates temporisés (cf[4, 6]) est un exemple de modèle continu dans lequel le temps est dense et prend des valeurs réelles. Les automates temporisés représentent une extension des  $\omega$ -automates (automates de Büchi et de Muller) par l'ajout des variables d'horloges et des contraintes d'horloges pour conditionner l'exécution des transitions. Pour donner une sémantique au modèle abstrait des automates temporisés, on définit le graphe des régions qui est un automate à états finis représentant toutes les exécutions possibles du modèle abstrait de départ. Chaque état est un couple formé de l'état de l'automate temporisé de l'origine et d'une classe d'équivalence des valeurs des différentes horloges utilisées. Le graphe des régions joue un rôle très important pour la vérification (cf[7, 8]) et le test (cf[9]) des systèmes temps-réel. D'une part il permet de vérifier si toutes les transitions du système sont exécutables et d'autre part de calculer la longueur de la trace pouvant distinguer deux états du système. Dans cette étude, on se propose de calculer exactement le nombre de régions pour chaque catégorie, générées par la donnée de  $n$  nombres entiers positifs  $c_i, i = 1, \dots, n$  appelés valeurs d'horloges. Dans leur article (cf[4]), Alur et Dill

proposent le nombre  $n! 2^n \prod_{i=1}^n (2 + 2c_i)$  comme majoration du nombre total des régions. Ce nombre nous a paru très exagéré. En effet, dans le cas où  $n=3$  et en prenant  $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ , on obtient exactement 8 sommets, 31 demi-droites ou

segments, 36 régions planes et 13 "volumes", ce qui fait en tout 88. Ce nombre est de loin très inférieur à leur majorant qui est 3072.

## II) RÉGIONS D'HORLOGES:

### 1) Définition de la relation d'équivalence:

Une région d'horloges d'un automate temporisé est une classe d'équivalence des valeurs d'horloges (interprétations d'horloges) et définie par la relation d'équivalence notée  $\perp$  (cf[4]).

Soit  $C$  un ensemble de  $n$  horloges. Pour chaque  $x \in C$ , notons par  $c_x$  le plus grand entier  $c$  tel que  $(x \leq c)$  ou  $(x \geq c)$  soit une contrainte sur  $x$ . On dira que deux interprétations d'horloges  $v \perp v'$  si et seulement si:

- pour tout  $x \in C$ ,  $\lfloor v(x) \rfloor = \lfloor v'(x) \rfloor$  ou  $\min(v(x), v'(x)) \geq c_x$ ,
- pour tout  $x, y \in C$  tels que  $v(x) \leq c_x$  et  $v(y) \leq c_y$ ,

$$\{v(x)\} \leq \{v(y)\} \Leftrightarrow \{v'(x)\} \leq \{v'(y)\},$$

- pour tout  $x, y \in C$  tel que  $v(x) \leq c_x$ ,  $\{v(x)\} = 0 \Leftrightarrow \{v'(x)\} = 0$

où  $\lfloor v(x) \rfloor$  et  $\{v(x)\}$  désignent respectivement la partie entière et la partie fractionnaire de la valeur d'horloges  $v(x)$ .

D'une manière informelle, la détermination des régions d'horloges se fait en discrétisant l'espace des horloges en des zones dont chacune d'entre elles représente une relation entre les différentes horloges. Dans chaque zone bornée, la différence maximale entre deux valeurs d'une même horloge est strictement inférieure à 1.

### 2) Construction des régions d'horloges:

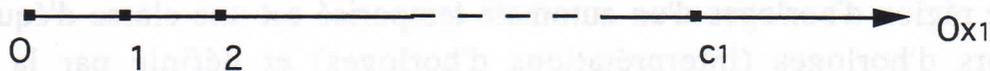
Pour bien saisir la méthode de construction des différentes sortes de régions, on étudiera successivement les cas  $n=1$ ,  $n=2$  et  $n=3$  avant de généraliser car on peut les visualiser à l'aide d'un schéma.

On posera:  $V_n^i = \{ \text{"volume" d'ordre } i \text{ dans } \mathfrak{R}^n \}$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Par exemple,  $V_n^0$  est l'ensemble des sommets,  $V_n^1$  l'ensemble des segments ou demi-droites,  $V_n^2$

l'ensemble des régions planes,  $V_n^3$  l'ensemble des volumes, etc... Enfin, on confondra l'ensemble  $V_n^i$  et son cardinal.

### 3) Étude des cas particuliers:

#### a) Étude du cas n=1:

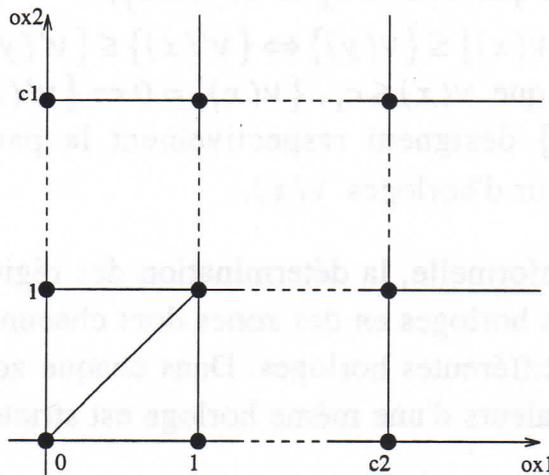


Les sommets, les segments et la demi-droite sont portés sur l'axe  $Ox_1$ .

$$V_1^0(c_1) = (1 + c_1) \text{ et}$$

$$V_1^1(c_1) = (1 + c_1) = V_1^0.$$

#### b) Étude du cas n=2:



En reportant  $(1 + c_2)$  fois les sommets qui se trouvent sur l'axe  $Ox_1$ , on obtient:

$$V_2^0 = V_2^0(c_1, c_2) = (1 + c_2)V_1^0(c_1).$$

Pour les segments et la demi-droite, on reporte, d'une part,  $(1 + c_2)$  fois ceux qui se trouvent sur l'axe  $Ox_1$ , et d'autre part,  $(1 + c_1)$  fois ceux qui se trouvent sur

l'axe  $0x_2$  (on a donc inversé les rôles de  $c_1$  et  $c_2$ ), puis on ajoute, autant de fois qu'il y a de carrés, le segment parallèle à la première bissectrice.

$$\begin{aligned} V_2^1(c_1, c_2) &= (1 + c_2)V_1^0(c_1) + (1 + c_1)V_1^0(c_2) + c_1c_2 \\ &= 2V_2^0 + c_1c_2. \end{aligned}$$

Pour les régions planes, on remarque qu'il existe trois sortes:

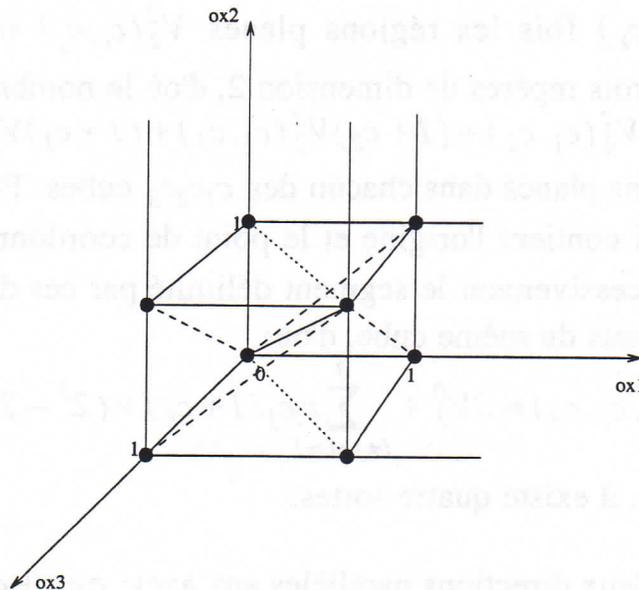
a) celles bornées:  $(2c_1c_2)$

b) celles bornées que dans une direction parallèle aux axes:  $(c_1 + c_2)$

c) et celle (unique) qui n'est bornée dans aucune direction parallèle aux axes, d'où

$$\begin{aligned} V_2^2(c_1, c_2) &= 1 + (c_1 + c_2) + 2c_1c_2 \\ &= V_2^0 + (2! - 1)c_1c_2. \end{aligned}$$

c) Étude du cas  $n=3$ :



On utilise la même technique que précédemment en ajoutant les nouvelles régions.

a) Pour les sommets,

$$V_3^0 = V_3^0(c_1, c_2, c_3) = (1 + c_3)V_2^0(c_1, c_2) = \prod_{i=1}^3 (1 + c_i).$$

b) Comme il y a trois axes, le nombre des segments et des demi-droites parallèles aux axes est:

$$(1 + c_2)(1 + c_3)V_1^1(c_1) + (1 + c_1)(1 + c_3)V_1^1(c_2) + (1 + c_1)(1 + c_2)V_1^1(c_3).$$

On ajoute les segments parallèles à la première bissectrice de chaque repère de dimension 2:  $c_1c_2(1 + c_3) + c_1c_3(1 + c_2) + c_2c_3(1 + c_1)$ ,

et les segments parallèles à la première bissectrice du repère de dimension 3:  $c_1c_2c_3$ .

Par conséquent,

$$V_3^1(c_1, c_2, c_3) = 3V_3^0 + \sum_{i \neq j \neq k=1}^3 c_i c_j (1 + c_k) + c_1 c_2 c_3.$$

c) Pour les régions planes, on procède comme suit:

- on reporte  $(1 + c_k)$  fois les régions planes  $V_2^2(c_i, c_j)$  obtenues dans le cas précédent dans les trois repères de dimension 2, d'où le nombre:

$$(1 + c_3)V_2^2(c_1, c_2) + (1 + c_2)V_2^2(c_1, c_3) + (1 + c_1)V_2^2(c_2, c_3).$$

- on ajoute les régions planes dans chacun des  $c_1c_2c_3$  cubes. Pour cela, prenons par exemple le cube qui contient l'origine et le point de coordonnées  $(1, 1, 1)$ . Il suffit alors de joindre successivement le segment délimité par ces deux points aux autres  $(2^3 - 2)$  points restants du même cube, d'où:

$$V_3^2(c_1, c_2, c_3) = 3V_3^0 + \sum_{i \neq j \neq k=1}^3 c_i c_j (1 + c_k) + (2^3 - 2)c_1 c_2 c_3.$$

d) Pour les volumes, il existe quatre sortes:

- ceux bornés,
- ceux bornés dans deux directions parallèles aux axes:  $c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3$ ,
- ceux bornés que dans une direction parallèle aux axes:  $c_1 + c_2 + c_3$ ,
- et celui (unique) qui n'est borné dans aucune direction parallèle aux axes.

Pour déterminer le nombre des volumes bornés, on procède comme suit en raisonnant sur le cube choisi précédemment: il suffit de joindre le segment d'extrémités l'origine et le point  $(1, 1, 1)$  à deux autres points choisis parmi les  $(2^3 - 2)$  points restants du même cube en évitant qu'ils soient coplanaires. Ainsi, il

Il y a 3 façons de choisir un sommet dont l'une des coordonnées est nulle (on les appellera sommets de niveau 1) et pour chacun de ces sommets et pour éviter qu'ils soient coplanaires, il ne reste que 2 façons de choisir un sommet dont deux coordonnées sont nulles (la même ordonnée nulle que celle du sommet choisi de niveau 1 et une autre). Ces sommets seront appelés sommets de niveau 2 (car ils ont deux ordonnées nulles). Par conséquent, le nombre total de volumes bornés est:  $3!c_1c_2c_3$ . Par suite:

$$\begin{aligned} V_3^3(c_1, c_2, c_3) &= 1 + (c_1 + c_2 + c_3) + c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 + 3!c_1c_2c_3 \\ &= V_3^0 + (3! - 1)c_1c_2c_3. \end{aligned}$$

### III) ÉTUDE DU CAS GÉNÉRAL:

A ce stade ci, introduisons certaines notations qui nous sont utiles. On pose:

-  $I = I_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $I_p = \{(i_1, i_2, \dots, i_p) \in I^p : i_1 < i_2 < \dots < i_p\}$  pour  $1 \leq p \leq n-1$ , et  $I_n = \{(1, 2, \dots, n)\}$ . On pose aussi  $\bar{I}_p = I - \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$  pour  $1 \leq p \leq n-1$  et  $\bar{I}_n = \emptyset$ . On notera que  $\text{card } I_p = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ .

-  $\sum_{I_p} c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_p} = 1$  pour  $p=0$  et  $A_p = \sum_{I_p} c_{i_1}\dots c_{i_p} \prod_{k \in \bar{I}_p} (1 + c_k)$  pour  $1 \leq p \leq n$ . On

obtient ainsi,  $A_1 = \sum_{i=1}^n c_i \prod_{j \in I-i} (1 + c_j)$  et  $A_n = \sum_{I_n} c_{i_1}\dots c_{i_n} = \prod_{i=1}^n c_i$ . Les expressions

$\sum_{I_p} c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_p}$  sont appelées fonctions monomiales symétriques (cf[1]). Bien

entendu,  $\sum_{p=0}^n \sum_{I_p} c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_p} = \prod_{i=1}^n (1 + c_i)$ .

- Introduisons les nombres suivants:

$$k!S(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} C_k^i i^n \text{ si } n \geq k \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Ce sont les nombres de Stirling de seconde espèce (cf[1], [2]).

- On considérera les polynômes eulériens suivants:

$$E_n(x) = x \sum_{k=1}^n k! S(n, k) (x-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k! S(n+1, k+1) (x-1)^{n-k}.$$

-  $S_{i, n-i}$  désignera un des  $C_n^i$  sommets de  $\mathfrak{R}^n$  dont  $i$  coordonnées sont égales à 1 et les  $(n-i)$  coordonnées restantes sont nulles, et qu'un des sommets  $S_{i-1, n-i+1}$  est produit à partir de  $S_{i, n-i}$  en annulant une des coordonnées non nulles. Les sommets  $S_{i, n-i}$  seront appelés sommets de niveau  $i$ .

### REMARQUE 1:

On peut aisément vérifier les égalités suivantes en développant et en arrangeant adéquatement les sommes.

$$i) A_p = \sum_{i=0}^{n-p} C_{p+i}^p \sum_{I_{p+i}} c_{i_1} \dots c_{i_{p+i}} = \sum_{k=p}^n C_k^p \sum_{I_k} c_{i_1} \dots c_{i_k}.$$

ii) Soit  $\alpha_p \in \mathfrak{R}$ . On déduit l'égalité suivante:

$$\sum_{p=j}^n \alpha_p A_p = \sum_{p=j}^n \left( \sum_{k=j}^p \alpha_k C_p^k \right) \sum_{I_p} c_{i_1} \dots c_{i_p}.$$

Dans le cas particulier  $\alpha_p = q^p$  où  $q$  est un entier positif non nul, alors

$$\sum_{p=j}^n q^p A_p = \sum_{p=j}^n \left( \sum_{k=j}^p q^k C_p^k \right) \sum_{I_p} c_{i_1} \dots c_{i_p}$$

$$\text{avec } \sum_{k=j}^p q^k C_p^k = (q+1)^p - \left( \sum_{k=0}^{j-1} q^k C_p^k \right).$$

### REMARQUE 2: (cf[1])

$$- S(n+1, k+1) = \sum_{i=k}^n C_n^i S(i, k).$$

- En remplaçant  $x$  par 2 dans l'expression des polynômes eulériens, on obtient:

$$E_n(2) = \sum_{k=0}^n k! S(n+1, k+1).$$

En introduisant les nombres eulériens

$$E(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} C_{n+1}^{k-i} i^n,$$

avec la condition:  $E(0, k) = 1$  si  $k = 0, 1$  et  $0$  si  $k \geq 2$ ,  
on obtient l'expression suivante:

$$E_n(x) = \sum_k E(n, k)x^k.$$

Ainsi,  $E_0(x) = 1$ ,  $E_1(x) = x$ ,  $E_2(x) = x + x^2$ ,  $E_3(x) = x + 4x^2 + x^3$ ,  
 $E_4(x) = x + 11x^2 + 11x^3 + x^4$ ,  $E_5(x) = x + 26x^2 + 66x^3 + 26x^4 + x^5$  et  
 $E_6(x) = x + 57x^2 + 302x^3 + 302x^4 + 57x^5 + x^6$ .

a) Calcul de  $V_n^0$ :

$$V_n^0 = \prod_{i=1}^n (1 + c_i) = \sum_{p=0}^n \sum_{I_p} c_{i_1} \dots c_{i_p}.$$

b) Calcul de  $V_n^1$ :

On reporte  $V_i^1$  sur les  $n$  axes  $0x_i$ , d'où le nombre  $\sum_{j \in I} V_j^1(c_j) \prod_{i \in I-j} (1 + c_i) = nV_n^0$ .

Ajoutons les segments parallèles aux premières bissectrices dans les  $C_n^2$  repères de dimension 2, les  $C_n^3$  repères de dimension 3, ..., les  $C_n^{n-1}$  repères de dimension  $n-1$  et le  $C_n^n = I$  repère de dimension  $n$ , d'où:

$$\begin{aligned} V_n^1 &= nV_n^0 + \sum_{p=2}^n A_p \\ &= n(1 + \sum_{i \in I} c_i) + \sum_{p=2}^n (n + \sum_{k=2}^p C_p^k) \sum_{I_p} c_{i_1} \dots c_{i_p} \\ &= n(1 + \sum_{i \in I} c_i) + \sum_{p=2}^n (n + 2^p - C_p^0 - C_p^1) \sum_{I_p} c_{i_1} \dots c_{i_p} \\ &= \sum_{p=0}^n (n + 2^p - 1 - p) \sum_{I_p} c_{i_1} \dots c_{i_p}. \end{aligned}$$

c) Calcul de  $V_n^2$ :

On reporte  $V_2^2$  sur les  $C_n^2$  repères cartésiens de dimension 2 et d'origine  $O$  d'où le nombre:

$$\sum_{I_2} V_2^2(c_{i_1}, c_{i_2}) \prod_{k \in \bar{I}_2} (1 + c_k) = C_n^2 V_n^0 + \sum_{I_2} c_{i_1} c_{i_2} \prod_{k \in \bar{I}_2} (1 + c_k) \\ = C_n^2 V_n^0 + A_2.$$

Il faut ajouter  $(2^3 - 2) \sum_{I_3} c_{i_1} c_{i_2} c_{i_3} \prod_{k \in \bar{I}_3} (1 + c_k)$  régions planes pour les repères de dimension 3, et en général, pour  $3 \leq p \leq n$ ,  $(2^p - 2) A_p$  régions planes pour les repères de dimension p. On obtient donc:

$$V_n^2 = C_n^2 V_n^0 + A_2 + \sum_{p=3}^n (2^p - 2) A_p.$$

Comme

$$\sum_{p=3}^n (2^p - 2) A_p = \sum_{p=3}^n 2! S(p, 2) A_p = \sum_{p=3}^n (3^p - 2^{p+1} + 1 - 2C_p^2) \sum_{I_p} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_p},$$

on déduit le nombre suivant:

$$V_n^2 = C_n^2 [1 + \sum_{i \in I} c_i] + \sum_{p=2}^n (C_n^2 + 3^p - 2^{p+1} + 1 - C_p^2) \sum_{I_p} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_p}.$$

#### d) Calcul de $V_n^n$ :

On vient de voir que les nombres  $V_i^i$  interviennent dans le calcul des nombres  $V_n^i$ . C'est pourquoi c'est à cette étape-ci qu'on sent le besoin de les calculer.

Il existe  $(n+1)$  sortes de volumes dont la dimension de Hausdorff (rappelons que la dimension de Hausdorff d'un sommet est nulle alors que celle d'un segment est égale à 1, d'une surface plane bornée ou non est égale à 2, etc...) est n (cf[3]):

- ceux bornés,

- ceux bornés dans  $(n-1)$  directions parallèles aux axes:  $\sum_{I_{n-1}} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_{n-1}},$

- etc...

- ceux bornés que dans une direction parallèle aux axes:  $\sum_{i \in I} c_i,$

- et celui (unique) qui n'est borné dans aucune direction parallèle aux axes.

Pour déterminer le nombre des volumes bornés, on procède comme suit en considérant le diagramme suivant:

$$S_{n,0} \rightarrow \begin{cases} C_n^1 S_{n-1,1} \rightarrow C_{n-1}^1 S_{n-2,2}, C_{n-1}^2 S_{n-3,3}, \dots, C_{n-1}^{n-3} S_{2,n-2}, C_{n-1}^{n-2} S_{1,n-1} \\ C_n^2 S_{n-2,2} \rightarrow C_{n-2}^1 S_{n-3,3}, C_{n-2}^2 S_{n-4,4}, \dots, C_{n-2}^{n-3} S_{1,n-1} \\ \dots \\ C_n^{n-3} S_{n-1,1} \rightarrow C_3^1 S_{2,n-2}, C_3^2 S_{1,n-1} \\ C_n^{n-2} S_{2,n-2} \rightarrow C_2^1 S_{1,n-1} \\ C_n^{n-1} S_{1,n-1} \rightarrow 0 \end{cases}$$

Pour construire un volume, il faut  $(n+1)$  sommets. Comme on a déjà 2, en l'occurrence l'origine et le sommet  $S_{n,0}$ , il nous reste à déterminer les  $(n-1)$  sommets restants. Il y a  $C_n^1$  façons de choisir un sommet de niveau  $(n-1)$  et pour éviter que le quatrième sommet soit coplanaire avec les 3 précédents, on est obligé de le choisir parmi les sommets de niveau  $(n-2)$  et il y en a  $C_{n-1}^1$ . On continue ce procédé de qualification jusqu'au choix du  $(n-1)$  i-ème choix du sommet de niveau 1 dont leur nombre est  $C_2^1$ . Ainsi le nombre total de volumes bornés est  $n!$ , d'où:

$$V_n^n = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{I_p} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_p} + n! \prod_{k \in I} c_k = V_n^0 + (n! - 1) \prod_{k \in I} c_k = V_n^0 + (n! - 1) A_n.$$

e) Calcul de  $V_n^{n-1}$ :

On reporte  $V_{n-1}^{n-1}$  sur les  $C_{n-1}^{n-1}$  repères cartésiens de dimension  $n-1$  et d'origine  $O$  d'où le nombre:

$$\begin{aligned} \sum_{I_{n-1}} V_{n-1}^{n-1}(c_{i_1}, \dots, c_{i_{n-1}}) \prod_{k \in I_{n-1}} (1 + c_k) &= n V_n^0 + ((n-1)! - 1) \sum_{I_{n-1}} c_{i_1} \dots c_{i_{n-1}} \\ &+ (n! - n) \prod_{k \in I} c_k = n V_n^0 + ((n-1)! - 1) A_{n-1} \end{aligned}$$

car  $A_{n-1} = \sum_{I_{n-1}} c_{i_1} \dots c_{i_{n-1}} + n \prod_{k \in I} c_k.$

A cette quantité, il faut ajouter les autres volumes de dimension de Hausdorff  $(n-1)$ . Comme il faut  $n$  sommets pour construire un volume et qu'on a déjà deux, il suffit de rechercher  $(n-2)$  en évitant que quatre points soient coplanaires en faisant le

choix de sommets à chaque niveau (ceci se traduit par la multiplication de n-1 combinaisons), d'où le nombre :

$$\begin{aligned} & [C_n^1 C_{n-1}^1 \dots C_4^1 (C_3^1 + C_3^2) + C_n^2 C_{n-2}^1 C_{n-3}^1 \dots C_3^1 C_2^1 + \dots + \\ & C_n^1 C_{n-1}^1 \dots C_{n-i+1}^1 C_{n-i}^2 C_{n-i-2}^1 \dots C_3^1 C_2^1 + \dots + C_n^1 C_{n-1}^1 \dots C_5^1 C_4^2 C_2^1] \prod_{k \in I} c_k \\ & = \frac{(n-1)}{2} n! \prod_{k \in I} c_k = \frac{(n-1)}{2} n! A_n. \end{aligned}$$

En définitive, on obtient:

$$\begin{aligned} V_n^{n-1} &= nV_n^0 + ((n-1)! - 1) \sum_{I_{n-1}} c_{i_1} \dots c_{i_{n-1}} + \frac{(n+1)! - 2n}{2} \prod_{k \in I} c_k \\ &= n \sum_{p=0}^{n-2} \sum_{I_p} c_{i_1} \dots c_{i_p} + ((n-1)! + n - 1) \sum_{I_{n-1}} c_{i_1} \dots c_{i_{n-1}} + \frac{(n+1)!}{2} \prod_{k \in I} c_k \\ &= nV_n^0 + ((n-1)! - 1) A_{n-1} + \frac{(n-1)}{2} n! A_n. \end{aligned}$$

Remarquons à ce niveau que  $\frac{(n-1)n!}{2} = (n-1)! S(n, n-1)$ .

#### f) Calcul de $V_n^k$ pour $2 \leq k \leq n-1$ :

On reporte  $V_n^k$  sur les  $C_n^k$  repères de dimension k et d'origine O d'où:

$$\begin{aligned} \sum_{I_k} V_n^k(c_{i_1}, \dots, c_{i_k}) \prod_{j \in \bar{I}_k} (1 + c_j) &= C_n^k V_n^0 + (k! - 1) \sum_{I_k} c_{i_1} \dots c_{i_k} \prod_{j \in \bar{I}_k} (1 + c_j) \\ &= C_n^k V_n^0 + (k! - 1) A_k \\ &= C_n^k \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{I_j} c_{i_1} \dots c_{i_j} + \sum_{j=k}^n (C_n^k + (k! - 1) C_j^k) \sum_{I_j} c_{i_1} \dots c_{i_j}. \end{aligned}$$

Il faut ajouter les volumes de dimension de Hausdorff k en appliquant la méthode décrite ci-dessus au moyen du diagramme. Ainsi, on a par exemple:

- l'ajout de  $\sum_{p=2}^n A_p$  pour  $V_n^1$ ,
- l'ajout de  $\sum_{p=3}^n \sum_{i_j=1}^{p-1} C_p^{i_j} A_p = \sum_{p=3}^n (2^p - 2) A_p$  pour  $V_n^2$ ,

- l'ajout de

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=4}^n \sum_{i_1=1}^{p-2} C_p^{i_1} \sum_{i_2=1}^{p-i_1-1} C_{p-i_1}^{i_2} A_p &= \sum_{p=4}^n \sum_{i_1=1}^{p-2} C_p^{i_1} (2^{p-i_1} - 2) A_p \\
 &= \sum_{p=4}^n (3^p - 3 \cdot 2^p + 3) A_p \\
 &= \sum_{p=4}^n (4^p - 3 \cdot 3^p + 3 \cdot 2^p - 1 - 3! C_p^3) \sum_{I_p} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_p}
 \end{aligned}$$

pour  $V_n^3$ ,

- l'ajout de

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=5}^n \sum_{i_1=1}^{p-3} C_p^{i_1} \sum_{i_2=1}^{p-i_1-2} C_{p-i_1}^{i_2} \sum_{i_3=1}^{p-i_1-i_2-1} C_{p-i_1-i_2}^{i_3} A_p &= \sum_{p=5}^n \sum_{i_1=1}^{p-3} C_p^{i_1} (3^p - 3 \cdot 2^p + 3) A_p \\
 &= \sum_{p=5}^n (4^p - 4 \cdot 3^p + 6 \cdot 2^p - 4) A_p \\
 &= \sum_{p=5}^n (5^p - 4 \cdot 4^p + 6 \cdot 3^p - 4 \cdot 2^p + 1 - 4! C_p^4) \sum_{I_p} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_p}
 \end{aligned}$$

pour  $V_n^4$ ,

- etc...

- l'ajout, pour  $1 \leq k \leq n-1$ , de

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=k+1}^n & \left( \sum_{i_1=1}^{p-(k-1)} C_p^{i_1} \sum_{i_2=1}^{p-i_1-(k-2)} C_{p-i_1}^{i_2} \sum_{i_3=1}^{p-i_1-i_2-(k-3)} C_{p-i_1-i_2}^{i_3} \dots \right. \\
 & \left. \sum_{i_{k-3}=1}^{p-3-\sum_{j=1}^{k-4} i_j} C_{k-4}^{i_{k-3}} \sum_{i_{k-2}=1}^{p-2-\sum_{j=1}^{k-3} i_j} C_{k-3}^{i_{k-2}} \sum_{i_{k-1}=1}^{p-1-\sum_{j=1}^{k-2} i_j} C_{k-2}^{i_{k-1}} \right) A_p \\
 &= \sum_{p=k+1}^n \left( \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} i^p C_k^i \right) A_p \\
 &= \sum_{p=k+1}^n k! S(p, k) A_p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=k+1}^n \left( \sum_{j=k+1}^p k! S(j, k) C_p^j \right) \sum_{I_p} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_p} \\
&= \sum_{p=k+1}^n k! (S(p+1, k+1) - C_p^k) \sum_{I_p} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_p} \\
&= \sum_{p=k+1}^n \left( \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} (i+1)^p C_i^k - k! C_p^k \right) \sum_{I_p} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_p}
\end{aligned}$$

pour  $V_n^k$ .

En définitive, on obtient:

$$\begin{aligned}
V_n^k &= C_n^k V_n^0 + (k! - 1) A_k + \sum_{p=k+1}^n k! S(p, k) A_p \\
&= C_n^k \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{I_p} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_p} + \sum_{p=k+1}^n [C_n^k - C_p^k + k! (S(p+1, k+1))] \sum_{I_p} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_p}.
\end{aligned}$$

Nous sommes en mesure de calculer  $\sum_{k=0}^n V_n^k$ . Pour cela, il suffit de calculer les coefficients de  $\sum_{I_p} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_p}$ .

### THÉORÈME 1:

$$\sum_{k=0}^n V_n^k = \sum_{k=0}^n [2^n - 2^k + E_k(2)] \sum_{I_k} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k}$$

**Preuve:** Il suffit de calculer le coefficient de  $\sum_{I_k} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k}$  pour  $1 \leq k \leq n$ , qui est

égale à:

$$C_n^0 = C_n^0 - C_k^0 + 0! S(k+1, 1) \text{ dans } V_n^0,$$

$$C_n^1 = C_n^1 - C_k^1 + 1! S(k+1, 2) \text{ dans } V_n^1,$$

$$C_n^2 = C_n^2 - C_k^2 + 2! S(k+1, 3) \text{ dans } V_n^2,$$

...

$$C_n^{k-1} = C_n^{k-1} - C_k^{k-1} + (k-1)! S(k+1, k) \text{ dans } V_n^{k-1},$$

$$C_n^k = C_n^k - C_k^k + k! S(k+1, k+1) = C_n^k - C_k^k + k! \text{ dans } V_n^k$$

$C_n^{k+1}$  dans  $V_n^{k+1}$ ,

...

$C_n^{n-1}$  dans  $V_n^{n-1}$ ,

$C_n^n$  dans  $V_n^n$ .

En additionnant ces nombres, on obtient:

$$\sum_{i=0}^n C_n^i - \sum_{i=0}^k C_k^i + \sum_{i=0}^k i! S(k+1, i+1) = 2^n - 2^k + E_k(2).$$

Cette formule est aussi valable pour  $k=0$ . ●

### REMARQUE 3:

- Comme  $\sum_{k=0}^n \sum_{I_k} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} = \prod_{i=1}^n (1 + c_i)$ , on déduit l'expression suivante:

$$\sum_{k=0}^n V_n^k = 2^n \prod_{i=1}^n (1 + c_i) + \sum_{k=0}^n [E_k(2) - 2^k] \sum_{I_k} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k}.$$

- Comme les nombres eulériens possèdent une certaine symétrie, que

$\sum_{i=1}^{k-1} 2^i = (2^k - 2)$  et  $\sum_k E(n, k) = n!$ , on déduit l'inégalité suivante:

$$E_k(2) - 2^k \leq \frac{k!}{2} (2 + \dots + 2^{k-1}) = k! (2^{k-1} - 1)$$

dès que  $k \geq 1$ .

### COROLLAIRE 1:

$$\sum_{k=0}^n V_n^k \leq (2^n + n! 2^{n-1} - \sum_{k=0}^n k!) \prod_{i=1}^n (1 + c_i).$$

**Preuve:** Immédiate. ●

### COROLLAIRE 2:

- Soit  $c_i = 1$ , alors on obtient:  $\sum_{k=0}^n V_n^k = 4^n - 3^n + 2E_n(2) - 1$ .

- Soit  $c_i = c$ . En posant  $(E.(2))^j = E_j(2)$ , alors

$$\sum_{k=0}^n V_n^k = 2^n (1+c)^n - (1+2c)^n + (1+cE.(2))^n.$$

**Preuve:** - Remarquons que  $\sum_{I_k} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} = C_n^k$ .

Comme  $S(k+1, i+1) = S(k, i) + iS(k, i+1)$  et  $\sum_{i=0}^k i! S(k+1, i+1) = E_k(2)$ , on

déduit l'expression suivante:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k E_k(2) &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k i! C_n^k S(k, i) + \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k (i+1)! C_n^k S(k, i+1) \\ &= \sum_{k=0}^n k! \sum_{i=k}^n C_n^i S(i, k) + \sum_{k=1}^n k! \sum_{i=k}^n C_n^i S(i, k) \\ &= \sum_{k=0}^n k! S(n+1, k+1) + \sum_{k=1}^n k! S(n+1, k+1) \\ &= E_n(2) + E_n(2) - 1. \end{aligned}$$

Pour les autres termes, il suffit de remarquer que  $2^n 2^n = 4^n$  et  $\sum_{k=0}^n C_n^k 2^k = 3^n$ .

- Ici  $\prod_{i=1}^n (1+c_i) = (1+c)^n$ . Comme  $\sum_{I_k} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} = C_n^k c^k$ , on déduit que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n [E_k(2) - 2^k] \sum_{I_k} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} &= \sum_{k=0}^n C_n^k c^k [E_k(2) - 2^k] \\ &= (1+cE.(2))^n - (1+2c)^n. \end{aligned}$$

Remarquons que le premier cas est déduit du second car

$$\sum_{k=0}^n C_n^k E_k(2) = (1+E.(2))^n. \bullet$$

### EXEMPLE:

Voici  $\sum_{k=0}^n V_n^k$  pour certaines valeurs de  $n$  en prenant  $c_i = 1$ :

88 pour  $n=3$ , 474 pour  $n=4$ , 2944 pour  $n=5$  et enfin 22098 pour  $n=6$ .

Notre majoration est:

176 pour  $n=3$ , 2784 pour  $n=4$ , 57536 pour  $n=5$  et enfin 1422720 pour  $n=6$ .

Si on prend comme majoration le nombre  $n! 2^n \prod_{i=1}^n (1 + c_i)$ , on obtient alors:

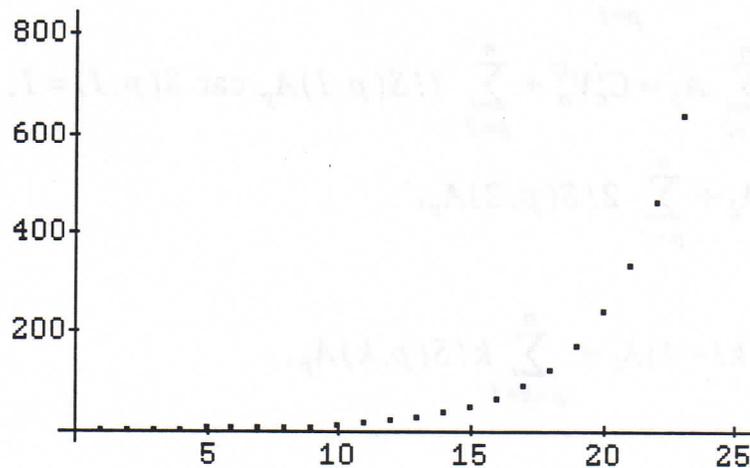
384 pour  $n=3$ , 6144 pour  $n=4$ , 122880 pour  $n=5$  et enfin 2949120 pour  $n=6$ .

En poussant un peu plus loin notre curiosité, on a étudié, pour  $1 \leq n \leq 23$ , le

rapport  $\frac{n! 2^n}{4^n - 3^n + 2E_n(2) - 1}$ . On a obtenu les valeurs suivantes:

{0.5, 0.44, 0.55, 0.81, 1.30, 2.09, 3.17, 4.60, 6.50, 9.06, 12.59, 17.46, 24.21, 33.56, 46.52, 64.49, 89.4, 123.94, 171.82, 238.18, 330.19, 457.74, 634.56}.

Autrement dit, ce rapport est exponentielle car  $\frac{n! 4^n}{4^n - 3^n + 2E_n(2) - 1} \geq 2^n$  pour  $n$  grand. On obtient alors ce graphique:



## THÉORÈME 2:

$$\sum_{k \text{ pair}} V_n^k = \sum_{k \text{ impair}} V_n^k.$$

**Preuve:** Dérivons  $E_k(x) = x \sum_{j=1}^k j! S(k, j)(x-1)^{k-j}$ . On obtient:

$$E_k'(x) = \sum_{j=1}^k j! S(k, j)(x-1)^{k-j} + x \sum_{j=1}^{k-1} j!(k-j)S(k, j)(x-1)^{k-j-1},$$

par conséquent,

$$E_k'(0) = \sum_{j=1}^k j! S(k, j) (-1)^{k-j}.$$

Comme  $E_n(x) = x + P(x)$  où  $P(x)$  est un polynôme tel que  $P'(0) = 0$ , on déduit que

$$\sum_{j=1}^k j! S(k, j) (-1)^{k-j} = 1$$

et donc, en multipliant les deux cotés par  $(-1)^{-k+2j}$ , on a:

$$\sum_{j=1}^k j! S(k, j) (-1)^j = (-1)^k.$$

D'un autre côté,

$$V_n^0 = C_n^0 V_n^0 = C_n^0 V_n^0 + \sum_{p=1}^n 0! S(p, 0) A_p \quad \text{car } S(p, 0) = 0,$$

$$V_n^1 = C_n^1 V_n^0 + \sum_{p=2}^n A_p = C_n^1 V_n^0 + \sum_{p=2}^n 1! S(p, 1) A_p \quad \text{car } S(p, 1) = 1,$$

$$V_n^2 = C_n^2 V_n^0 + A_2 + \sum_{p=3}^n 2! S(p, 2) A_p,$$

...

$$V_n^k = C_n^k V_n^0 + (k! - 1) A_k + \sum_{p=k+1}^n k! S(p, k) A_p,$$

...

$$V_n^{n-1} = C_n^{n-1} V_n^0 + [(n-1)! - 1] A_{n-1} + (n-1)! S(n, n-1) A_n,$$

$$V_n^n = C_n^n V_n^0 + (n! - 1) A_n.$$

En faisant la sommation, on constate que le coefficient de  $A_k$  est:

$$-S(k, k) + \sum_{j=1}^k j! S(k, j).$$

Il faut alors prouver que:

$$(-1)^k S(k, k) + \sum_{j=1, j \text{ impair}}^k j! S(k, j) = \sum_{j=2, j \text{ pair}}^k j! S(k, j).$$

Autrement dit,

$$-(-1)^k S(k, k) - \sum_{j=1, j \text{ impair}}^k j! S(k, j) + \sum_{j=2, j \text{ pair}}^k j! S(k, j) = 0,$$

c'est à dire:

$$\sum_{j=1}^k (-1)^j j! S(k, j) = (-1)^k,$$

ce qui a été fait précédemment.

Quant aux coefficients de  $V_n^0$ , on sait déjà que  $\sum_{k \text{ pair}} C_n^k = \sum_{k \text{ impair}} C_n^k$ .

En outre, on remarque que  $A_1$  n'existe pas et que  $A_2$ , dont les coefficients sont 1, n'existe que dans  $V_n^1$  et  $V_n^2$ . ●

#### IV) CONCLUSION

Dans cet article, nous avons calculé le nombre exact de régions d'horloges pour un automate temporisé quelconque. Ce nombre est de très loin plus petit que celui donné par Alur et Dill (cf[4]). Puisque le graphe de régions représente la sémantique des automates temporisés en regroupant tous les états équivalents, son nombre d'états est bien borné par le nombre exact de régions d'horloges de l'automate. Ceci s'avère très important pour tester les systèmes temps-réel puisqu'il permet de calculer la longueur de la trace pouvant distinguer deux états du système.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] COMTET, L., Advanced Combinatorics, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland (1974).
- [2] RIORDAN, J., Combinatorial Identities, John Wiley (1968) .
- [3] BARNESLEY, M., Fractals Everywhere, Academic Press (1988).
- [4] Alur, R. & Dill, D., A Theory of Timed Automata, Theoretical Computer Science (126): 183-235, (1994).
- [5] Dill, D., Timing Assumptions and Verification of Finite-State Concurrent Systems, Lecture Notes in Computer Science, Volume , Pages 197-212, 1989.
- [6] Alur, R. & Dill, D., Automata for Modeling Real-Time Systems, Lecture Notes in Computer Science, Volume 443, Pages 322-335, 1990.
- [7] Alur, R. & all, Minimization of Timed Systems, Lecture Notes in Computer Science, Volume 630, Pages 340-354, 1992.
- [8] Alur, D. & all, An Implementation of three algorithms for Timing Verification Based on Automata Emptiness, Proceedings of the 1992 IEEE Real-Time Systems Symposium (RTSS'92), 1992.
- [9] En-Nouaary, A. & Dssouli, R. & Elqortobi, A., Génération de Tests Temporisés, Colloque Francophone de l'Ingénierie des Protocoles (CFIP'97), Liège, Belgique, 1997.